24　ひろしさんは，計量カップや計量スプーンを使って水や砂糖などを量ろうとしています。図１のように，計量カップには，円柱の形をしたものや円錐を底面に平行な面で切ったような形をしたもの，計量スプーンには，量る部分が半球の形をしたものがあります。そこで，ひろしさんは，円柱，円錐，半球の体積や表面積等について，調べてみることにしました。次の（１）～（４）の各問いに答えなさい。

図１

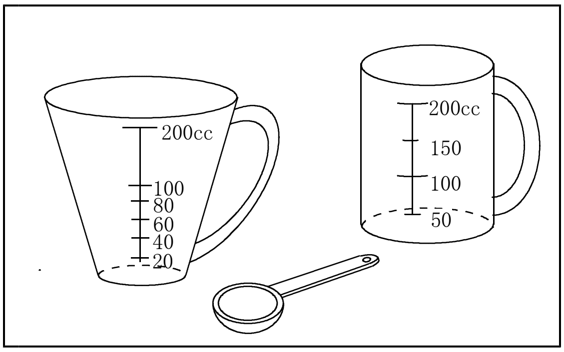
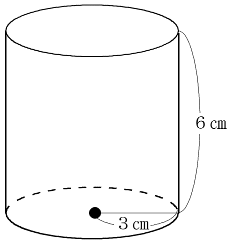
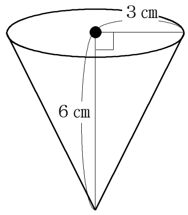


図２



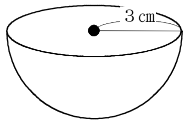
円柱

図３



円錐

図４



半球

（１）図２の円柱の体積の求め方を参考にして，図３の円錐，図４の半球の体積をそれぞれ求めなさい。ただし，円周率はπとします。

図２　円柱	図３　円錐	図４　半球
【求め方】 体積＝底面積×高さ （$\pi \times 3^2$）×６ ＝９π×６ ＝５４π	【求め方】	【求め方】
体積　５４π　cm^3	体積　cm^3	体積　cm^3

（２）ひろしさんは（１）の結果から円柱，円錐，半球の体積について比較し，まとめています。下の**ア**に言葉を，**イ**・**ウ**には，当てはまる数を入れて【ひろしさんのまとめ】を完成させなさい。

【ひろしさんのまとめ】

３つの立体の体積を比較してみると，円錐と半球の体積は（**ア**　　　　　　）。
円柱の体積は，円錐の体積の（**イ**　　）倍になっている。
円柱の体積は，半球の体積の（**ウ**　　）倍になっている。

（３）次にひろしさんは，図２の円柱の側面積と図４の半球の球面の面積をそれぞれ求め，下のようにまとめました。下の**ア**から**ウ**に当てはまる数を入れて【ひろしさんのまとめ】を完成させなさい。ただし，円周率はπとします。

【ひろしさんのまとめ】

図２の円柱の側面積は（**ア**　　　　）cm^2で，図４の半球の球面の面積は（**イ**　　　　）cm^2。
２つの面積を比較してみると，円柱の側面積は，半球の球面の面積の（**ウ**　　　）倍になっている。

（４）ひろしさんは，図３の円錐の側面積も求めようと思いました。まず，円錐の母線の長さを求めてから，展開図にして考え，側面積になるおうぎ形の中心角を求めようとしました。しかし，母線の長さを求めてみると，根号を含んだ長さになるために中心角を求めることができず，兄に教えてもらうことにしました。次は，そのときの２人の会話です。会話文中の $\boxed{\text{カ}}$ には，母線を求めるための計算の過程を，**キ**から**サ**には数や式を入れなさい。

兄：円錐の母線の長さを求めることはできたかな。

ひろし：底面の半径３㎝の円と高さの６㎝は直角に交わっているから，三平方の定理からこの式で求めることができたよ。

カ

だから，母線の長さは（**キ**　　）㎝になるよ。

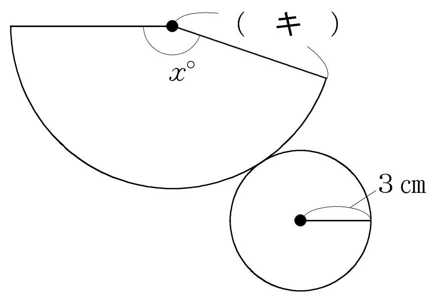
兄：そうだね。その考え方でいいと思うよ。

ひろし：でも，展開図にしたときには，右の図５のように，中心角x°として式をつくるとこんな式になるんだ。

$$2\pi \times 3 = 2\pi \times (\text{キ}\quad) \times \frac{x}{360}$$

この式から，中心角の大きさxを求めようとしても整数にならなくて困っているんだ。

図５



兄：この式からだと，中心角の大きさを整数で求めることはできないね。じゃあ，考え方を変えて，中心角を求めなくてもおうぎ形の面積を求める方法があったことを思い出してごらん。
おうぎ形の面積をＳ，母線の長さをa，弧の長さをℓとしたときの関係式はどうだった。

ひろし：そういえば，Ｓ＝（**ク**　　　　）という式があった。

兄：思い出したね。そうするとおうぎ形の弧の長さℓは，底面の周の長さと等しいから，（**ケ**　　）㎝になるね。

ひろし：aに（**キ**　　）を，ℓに（**ケ**　　）を代入すると，式は，Ｓ＝（**コ**　　　　）になって，まとめてみると（**サ**　　）㎝²になって，求めることができるね。どうもありがとう。

24

（1）

図3　円錐	図4　半球
【求め方】 体積 ＝ $\frac{1}{3}$ ×底面積×高さ $\frac{1}{3}$ ×（π × 3^2） × 6 ＝ $\frac{1}{3}$ × 9π × 6	【求め方】 体積 ＝ $\frac{1}{2}$ ×球の体積 $\frac{1}{2}$ ×（$\frac{4}{3}$ × π × 3^3） ＝ $\frac{1}{2}$ × 36π
体積　　18π　　cm^3	体積　　18π　　cm^3

（２）ア…等しい（同じ），イ…３，　ウ…３

【説明】（１）より円柱，円錐，半球の体積は，それぞれ次のようになる。

円柱の体積は$54\pi cm^3$，円錐の体積は$18\pi cm^3$，半球の体積は$18\pi cm^3$である。

よって，円錐の体積と半球の体積は，$18\pi cm^3$となり，等しい。

また，円柱の体積は，$54\pi cm^3$ であり，円錐，半球の体積の３倍になっている。

（３）ア…36π，イ…18π，　ウ…２

【説明】

円柱の側面積は，（底面の周の長さ）×（高さ）より，

$2\pi \times 3 \times 6 = 36\pi$　　　　36π（cm^2）・・・①

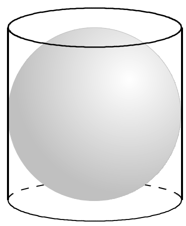
半球の球面の面積は，球の表面積の半分より，

$\frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 3^2 = 18\pi$　　　　18π（cm^2）・・・②

①・②より

円柱の側面積は，半球の球面の面積の２倍になっている。

このことから，右の図のように，底面の直径と高さが等しい円柱の容器にぴったり入る球において，円柱の側面積と半球の球面の面積の２倍である球の表面積が等しくなることがわかる。



（４）カ…　母線の長さを$x$cmとすると

$x^2 = 3^2 + 6^2$

$x^2 = 45$

$x > 0$より　　$x = 3\sqrt{5}$

キ…$3\sqrt{5}$，ク…$\frac{1}{2}a\ell$，ケ…6π，コ…$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 6\pi$，サ…$9\sqrt{5}\pi$

【説明】母線の長さを$x$cmとすると，三平方の定理から

$$x^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

xは長さなので，$x>0$より $x=3\sqrt{5}$ になる。

よって，母線の長さは，$3\sqrt{5}$ cmである。

円錐の側面積は，展開図にしておうぎ形から求める方法があるが，
この問題は，側面積であるおうぎ形の半径が（キ）から$3\sqrt{5}$ cmとなり，
中心角の大きさをx°として，方程式を下のように立てても，xの値が整数で求めることができない。

$$2\pi\times 3 = 2\pi\times 3\sqrt{5}\times\frac{x}{360}$$

このようなときには，おうぎ形の面積をS，母線の長さをa，弧の長さをℓとしたとき，$S=\frac{1}{2}a\ell$という関係式があったことを確認する。

この式の関係から，$S=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 6\pi$

となり，$S=9\sqrt{5}\pi$

また，このほかに，右の図のように，母線の長さRと底面の半径ｒの長さから側面積を求める式が下の式のように，表すことができることを確認する。

$S = rR\pi$