38　はるきさんたちは，九九表にある自然数の性質について調べています。次の(1)・(2)の各問いに答えなさい。

(1)　はるきさんは，次の**【ルール１】**で縦，横２つずつ並んだ４つの数を四角形で囲み，囲んだ数の和の性質について考えました。

【ルール１】

かけられる数とかける数が**同じ**２数の計算結果が左上の数になるようにして４つの数を四角形で囲む。

例えば，右の図のように，かけられる数とかける数が５で同じ場合は，左上の数が 25 となり，四角形で囲んだ４つの数は 25， 30， 30， 36 となります。このとき，次の①～③の各問いに答えなさい。

かける数

かけられる数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

①　はるきさんは，四角形で囲んだ４つの数の和の性質について次のような予想を立てました。**【はるきさんの予想】**の$\boxed{\quad\quad}$に当てはまる数を書きなさい。

【はるきさんの予想】

左上の数が４のとき，四角形で囲んだ４つの数は， ４， ６， ６， ９となる。
この４つの数の和は，

$4+6+6+9$
$=25$
$=5^2$

左上の数が９のとき，四角形で囲んだ４つの数は， ９， 12， 12， 16 となる。
この４つの数の和は，

$9+12+12+16$
$=49$
$=7^2$

左上の数が 16 のとき，四角形で囲んだ４つの数は， 16， 20， 20， 25 となる。

$16+20+20+25$
$=81$
$=\boxed{\quad\quad}$

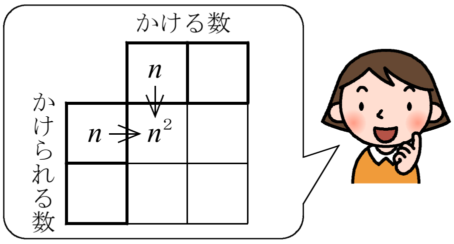
このことから，四角形で囲んだ４つの数の和は，奇数の２乗になると予想できる。

②　さゆりさんは，**【はるきさんの予想】**が正しいことを文字を用いて次のように説明しました。**【さゆりさんの説明】**の$\boxed{\text{ア}}$と$\boxed{\text{イ}}$には当てはまる式を書き，$\boxed{\text{ウ}}$には式をつくって計算の過程を書きなさい。ただし，同じ記号のところには，同じ式が当てはまるものとする。

【さゆりさんの説明】

四角形で囲んだ左上の数のかけられる数を n とすると，かける数も n だから，左上の数は n^2 と表すことができる。また，四角形で囲んだ右上の数は，かける数が $n+1$ となるので，　右上の数は，$\boxed{\text{ア}}$と表すことができる。同様に，左下の数は右上の数と同じになるので，$\boxed{\text{ア}}$となり，また，右下の数は$\boxed{\text{イ}}$と表すことができる。この４数の和は，

$\boxed{\text{ウ}}$



$= \underline{(2n+1)^2}$

$2n+1$ は奇数だから，四角形で囲んだ４つの数の和は，奇数の２乗になる。

③　かずやさんは，**【さゆりさんの説明】**の結論である「奇数の２乗」のほかにも成り立つことがあることを発見しました。次の**ア**から**エ**の中から正しいものを**１つ**選びなさい。また，それを示すためには，**【さゆりさんの説明】**の下線部$\underline{(2n+1)^2}$をどのように書きかえればよいか，書きなさい。

ア　かけられる数の２数の和の２乗
イ　かけられる数の２数の差の２乗
ウ　かけられる数の２数の積の２乗
エ　かけられる数の２数の商の２乗

(2)　ひかりさんは，はるきさんたちとは異なる**【ルール２】**で縦，横２つずつ並んだ４つの数を四角形で囲み，囲んだ数の和の性質について考えました。

【ルール２】

かけられる数とかける数が**異なる**２数の計算結果が左上の数になるようにして４つの数を四角形で囲む。

例えば，右の図のようにかけられる数が２，かける数が６で異なる場合は，左上の数が 12 となり，四角形で囲んだ４つの数は 12，14，18，21 となります。このとき，次の①～③の各問いに答えなさい。

かける数

かけられる数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

①　ひかりさんは，四角形で囲んだ４つの数の和について，次のような予想を立てました。

【ひかりさんの予想】

四角形で囲んだ４つの数の和は，かけられる数の２数の和とかける数の２数の和の積に等しい。

たけきさんは，**【ひかりさんの予想】**が正しいことを次のように確認しています。**【たけきさんの確認】**の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数を書きなさい。ただし，同じ記号のところには，同じ数が当てはまるものとする。

【たけきさんの確認】

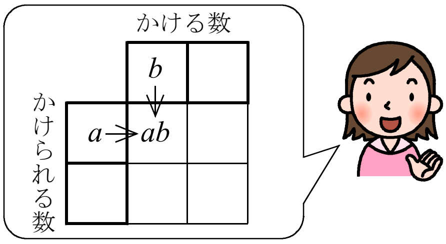
例えば，左上の数が 18 のとき，
四角形で囲んだ４つの数は， 18， 24， 21， 28 となる。
この４つの数の和は，

$18 + 24 + 21 + 28$
$= 91$
$= 7 \times 13$
$= (\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}})(\boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}})$

$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ はかけられる数の２数，$\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ はかける数の２数を表しているので，**【ひかりさんの予想】**は正しい。また，$\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ をかけられる数の２数，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ をかける数の２数と考えることもできる。この場合も**【ひかりさんの予想】**は正しい。

② ひかりさんの予想が正しいことを，まゆこさんは次のように説明しました。**【まゆこさんの説明】**の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ には当てはまる式を書き， $\boxed{\text{オ}}$ には式をつくって計算の過程を書きなさい。ただし，同じ記号のところには，同じ式が当てはまるものとする。

【まゆこさんの説明】

> 四角形で囲まれた左上の数のかけられる数を a，かける数を b とすると，左上の数は ab と表すことができる。また，四角形で囲んだ右上の数は，かける数が $b+1$ となるので，右上の数は，$\boxed{\text{ア}}$ と表すことができる。また，左下の数は，かけられる数が $\boxed{\text{イ}}$ となるので左下の数は，$\boxed{\text{ウ}}$ と表すことができる。以上のことから，右下の数は $\boxed{\text{エ}}$ と表すことができる。
> この４数の和は，
>
> $\boxed{\qquad\qquad\text{オ}\qquad\qquad}$
>
> 
>
>
> $= (2a+1)(2b+1)$
> $= \{a+(\boxed{\text{イ}})\}\{b+(b+1)\}$
> a，$\boxed{\text{イ}}$ はかけられる数の２数，b，$b+1$ はかける数の２数を表しているので，四角形で囲んだ４つの数の和は，かけられる数の２数の和とかける数の２数の和の積に等しい。また，b，$b+1$ をかけられる数の２数，a，$\boxed{\text{イ}}$ をかける数の２数と考えることもできる。この場合も四角形で囲んだ４つの数の和は，かけられる数の２数の和とかける数の２数の和の積に等しい。

③ しょうたさんは，**【まゆこさんの説明】**で明らかになった四角形で囲んだ４つの数の和の性質が，九九表を 10 の段，11 の段，…と広げた場合にも成り立つことに気がつき，その性質を利用して次のような問題をつくりました。**【しょうたさんの問題】**を解きなさい。

【しょうたさんの問題】

> 四角形で囲んだ４つの数の和が 825 になるとき，かけられる２数とかける数の２数の４数を求めなさい。ただし，かけられる数，かける数ともに 10 以上の自然数とする。

825 を素因数分解して，825 になる
２数の組み合わせを考えよう。

$\boxed{38}$

（１）① 【趣旨】問題場面における考察の対象を明確に捉えることができる。

9^2

② 【趣旨】目的に応じて数を文字を用いて表したり，その意味を読み取ったりして，事柄が成り立つ理由を説明することができる。（事柄・事実の説明）

ア　$n(n+1)$

イ　$(n+1)^2$

ウ　$n^2+n(n+1)+n(n+1)+(n+1)^2$

$=n^2+n^2+n+n^2+n+n^2+2n+1$

$=4n^2+4n+1$

③ 【趣旨】ある条件の下で，いつでも成り立つ整数の性質を見いだし，それを数学的に表現することができる。

記号　ア

式　$\{n+(n+1)\}^2$

（２）① 【趣旨】解決された課題から新たな性質を見いだし，問題場面における考察の対象を明確に捉えることができる。

ア　３

イ　４（ア，イは順不同）

ウ　６

エ　７（ウ，エは順不同）

② 【趣旨】目的に応じて数を文字を用いて表したり，その意味を読み取ったりして，事柄が成り立つ理由を説明することができる。（事柄・事実の説明）

ア　$a(b+1)$

イ　$a+1$

ウ　$b(a+1)$

エ　$(a+1)(b+1)$

オ　$ab+a(b+1)+b(a+1)+(a+1)(b+1)$

$=ab+ab+a+ab+b+ab+a+b+1$

$=4ab+2a+2b+1$

③ 【趣旨】数学的な結果を事象に即して解釈し，問題場面における事象を的確に捉え，素因数分解を使って問題を解決することができる。

192，204，208，221（順不同）

$\boxed{解法例}$　825を素因数分解すると，$3 \times 5^2 \times 11$

よって，825になる2数の組み合わせは，
3×275
5×165
11×75
15×55
25×33　の5通り。

ただし，かけられる数，かける数とも10以上の自然数より，825になる2数の組み合わせは25×33しかないことが分かる。
したがって，左上のかけられる数をa，かける数をbとすると，四角形で囲んだ4つの数の和は$(2a+1)(2b+1)$で表されるので，
$(2a+1)(2b+1) = 25 \times 33$

$2a+1=25$，$2b+1=33$のとき，
$a=12$，$b=16$となるので，かけられる数は12，13，かける数は16，17となる。
以上のことより，四角形で囲んだ4つの数は，
$12 \times 16 = 192$
$12 \times 17 = 204$
$13 \times 16 = 208$
$13 \times 17 = 221$

$2a+1=33$，$2b+1=25$のとき，
$a=16$，$b=12$となるので，かけられる数は16，17，かける数は12，13となる。
同様にして，四角形で囲んだ4つの数は，192，204，208，221

ゆえに，四角形で囲んだ4つの数は，192，204，208，221となる。